第14卷 第4期　　曲阜师范大学学报　　Vol.14 No.4
1988年10月　　Journal of Qufu Normal University　　Oct. 1988

杨辉三角形中奇数的分布

方 玉 光

摘　　要

本文给出R. Homsbergr关于二项式系数一个结果的简单证明，同时对杨辉三角形中奇数的分布作了估计。

关键词： 杨辉三角形，奇数的分布，估计。

在文献〔1〕中提出了这样一个结果：$\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，… $\binom{n}{n}$ 中有2的某个幂次方个奇数，并指出其证明比较复杂。文〔2〕中虽可给出证明，但其用到了Lucas恒等式及同余式的有关知识，并非初等。本文给出了这个结果的更好的形式，及其简单证明并且对杨辉三角形中奇数的分布作了估计。

§1　$\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，…$\binom{n}{n}$中奇数的个数

定理1 设$n=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_k}$，其中$n_1>n_2>\cdots>n_k\geqslant 0$，则$\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，… $\binom{n}{n}$ 中有2^k个奇数。

先证明两个引理。

引理1　设p为素数，$0\leq m<p^r$，则有

$\mathrm{pot}_p\left(\binom{p^r+m}{l}\right)=\mathrm{pot}_p\left(\binom{m}{l}\right)$对一切$0\leq l\leq m$成立，其中$\mathrm{pot}_p(n)$表示$p^{\mathrm{pot}_p(n)}\mid n$，但$p^{\mathrm{pot}_p(n)+1}\nmid n$。

证明　$$\mathrm{pot}_p\left(\binom{p^r+m}{l}\right)=\sum_{i=1}\left(\left[\frac{p^r+m}{p^i}\right]-\left[\frac{l}{p^i}\right]-\left[\frac{p^r+m-l}{p^i}\right]\right)$$

$$=\sum_{i=1}\left(\left[\frac{m}{p^i}\right]-\left[\frac{l}{p^i}\right]-\left[\frac{m-l}{p^i}\right]\right)=\mathrm{pot}_p\left(\binom{m}{l}\right).$$

引理2　当$m<l<2^k$时，$2\binom{2^k+m}{l}$　$(0\leq m<2^k)$。

证明 $\operatorname{pot}_2\left(\binom{2^k+m}{l}\right)=\sum_{r=1}^{k}\left(\left[\frac{2^k+m}{2^r}\right]-\left[\frac{l}{2^r}\right]-\left[\frac{2^k+m-l}{2^r}\right]\right)\geqslant\left[\frac{2^k+m}{2^k}\right]-\left[\frac{l}{2^k}\right]-\left[\frac{2^k+m-l}{2^k}\right]=1$ 只须注意到$l<2^k$，$2^k+m-l<2^k$即可得证，故 $2\mid\binom{2^k+m}{l}$。

设 $\delta(n)=\begin{cases}0, & 2\mid n,\\ 1, & 2\nmid n\end{cases}$ $\Delta(n)=\sum_{k\le n}\delta\left(\binom{n}{k}\right)$。

定理 1 的证明：注意到$\Delta(n)$即$\binom{n}{0}$，…$\binom{n}{n}$中奇数的个数，且由引理 1 知 $\delta\left(\binom{2^k+m}{l}\right)=\delta\left(\binom{m}{l}\right)$对$0\le m<2^k$，$0\le l\le m$成立，即有

$$\Delta(2^k+m)=\sum_{0\le l\le m}\delta\left(\binom{2^k+m}{l}\right)+\sum_{2^k\le l}\delta\left(\binom{2^k+m}{l}\right)+\sum_{m<l<2^k}\delta\left(\binom{2^k+m}{l}\right)=$$

$$=2\sum_{l\le m}\delta\left(\binom{m}{l}\right)=2\Delta(m).$$

对$n=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_l}$，$n_1>n_2>\cdots>n_l\geqslant0$，有$\Delta(n)=2\Delta(2^{n_2}+\cdots+2^{n_l})=\cdots=2^{l-1}\Delta(2^{n_l})=2^l$。

定理 2 设 $f(x)=\sum_{0\le n\le x}\Delta(n)$，则 $\frac{1}{3}<f(x)/x^{\log_2 3}\le 3$。

证明 对于$k\geqslant1$，$f(2^k-1)=f(2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+1)=f(2^{k-2}+\cdots+1)+$ $+\sum_{1+\cdots+2^{k-2}<n\le 2^k-1}\Delta(2^{k-1}+n)=f(2^{k-2}+\cdots+1)+2\sum_{n\le 2^{k-1}-1}\Delta(n)=3f(2^{k-1}-1)=\cdots=$ $=3^kf(0)=3^k$。

假设 $2^k\le x<2^{k+1}$，（•），则有 $k\le\log_2x<k+1$，$f(2^k-1)\le f(x)\le f(2^{k+1}-1)$，即$3^k\le f(x)\le3^{k+1}$。于是再利用（•）即得$\frac{1}{3}\le f(x)/x^{\log_2 3}<3$。

易由$m_k=2^k$，与$m_k=3\cdot2^{k-1}-2$知$f(m)/m^{\log_2 3}$在$m\to\infty$时极限不存在。设 $\alpha=\varliminf_{n\to\infty}f(n)/n^{\log_2 3}$，$\beta=\varlimsup_{n\to\infty}f(n)/n^{\log_2 3}$。我们有

定理 3 序列 $\{f(n)/n^{\log_2 3}\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 内稠密。

证明 记$A(n)=f(n)/n^{\log_2 3}$，只要证明$A(n)-A(n+1)\to0$ $(n\to\infty)$。由$f(n)$的定义易得$f(n+1)-f(n)\le n+1$。于是

$$|A(n)-A(n+1)|=\left|\frac{f(n)}{n^{\log_2 3}}-\frac{f(n+1)}{(n+1)^{\log_2 3}}\right|\le f(n)\left|\frac{1}{n^{\log_2 3}}-\frac{1}{(n+1)^{\log_2 3}}\right|$$

$$+\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)^{\log_2 3}}\le3\left[1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\log_2 3}\right]+\frac{1}{(n+1)^{\log_2 3-1}}\to0\quad(n\to\infty),$$

因此$A(n)$在$[\alpha,\beta]$内稠密。

定理 4 $\sum_{n\le x}\log\Delta(n)=\frac{1}{2}x\log x+Q(x)x$，其中$|Q(x)|\le5\log2$。

证明　若$n=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_t}$，$n_1>n_2>\cdots>n_t\geqslant 0$，则记$\alpha(n)=t$，于是$\Delta(n)=2^{\alpha(n)}$，故$\sum_{n\leq x}\log\Delta(n)=\log 2\sum_{n\leq x}\Delta(n)$。由〔3〕中$k=2$的结果可知

$$\sum_{n\leq x}\log\Delta(n)=\log 2\left(\frac{x\log x}{2\log 2}+Q_1(x)x\right)=1/2x\log x+(Q_1(x)\log 2)x=(1/2)x\log x+$$
$$+Q(x)x.$$

很容易从〔3〕中定理1的证明推出$|Q_1(x)|\leq 5$。故我们有 $|Q(x)|\leq 5\log 2$。对于$f(x)$，我们还有

定理5　设$x=2^{x_1}+2^{x_2}+\cdots+2^{x_k}$，其中$x_1>x_2>\cdots>x_k\geqslant 0$。$B_i(x)$表示不大于$x$的$\alpha(n)=i$的解$n$的个数，则$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{x_1+1}2^i B_i(x)$，且$x_1=\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$。

证明　$f(x)=\sum\limits_{n\leq x}\Delta(n)=\sum\limits_{n\leq x}2^{\alpha(n)}=\sum\limits_{i=0}^{x_1+1}\sum\limits_{\alpha(n)=i}2^i=\sum\limits_{i=0}^{x_1+1}2^i\sum\limits_{\alpha(n)=i}1=\sum\limits_{i=0}^{x_1+1}2^i B_i(x)$。

由$x=2^{x_1}+\cdots+2^{x_k}$极易得到$[\log x/\log 2]$。

参　考　文　献

〔1〕R. Honsberger，组合分析与数论中三个奇妙的结果，数学译林，1984，Vol. 3，No. 4.

〔2〕N. J. Fine, Binomial confficients modulo a prime. Amer. Math. Monthly. 54 (1947)，589—592.

〔3〕周伯埙，严士健，关于k进位表示法的一个问题，数学学报，第五卷 第四期，1955年12月.

〔4〕华罗庚，数论导引PP. 15，科学出版社（1975）.

THE DISTRIBUTION OF ODD NUMBERS IN Y ANG HUI TRIANGLE

Abstract

In this paper, we give the simple proof to a result on binomial coefficients by R. Honsberger. And furthermore, we give some estimates to the distribution of odd numbers in Yang Hui triangle.

Key words: Yang Hui Triangle, Distribution of Odd Numbers, Estimate.