曲阜师院学报自然科学版一九八五年第四期
Natural Science Edition
Journal of Qufu Teachers College (4), 1985

一个极限问题的讨论

方玉光
（数学系81级）

在文〔1〕中，讨论了极限 $\lim\limits_{h\to 0^+} I_\lambda(h)=0\ (\lambda\geq 0)$ 的两种证明。本文试图给出该极限推广形式。

定理一 设 $I_\lambda(h)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h^{\lambda+1}}\displaystyle\int_0^h x^\lambda \sin\frac{1}{x}dx$，则当且仅当 $\lambda>-2$ 时，有 $\lim\limits_{h\to 0^+} I_\lambda(h)=0$。

证明 当 $\lambda>-1$ 时，作变换 $x=\dfrac{1}{y}$，并记 $p=\dfrac{1}{h}$，有

$$I_\lambda(h)=p^{\lambda+1}\int_p^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{\lambda+2}}dy=I_1+I_2 \qquad (1)$$

其中 $\quad I_1=p^{\lambda+1}\displaystyle\int_p^{p^2}\frac{\sin y}{p^{\lambda+2}}dy,\qquad I_2=p^{\lambda+1}\int_{p^2}^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{\lambda+2}}dy$。

对于 I_1，应用积分第二中值定理可得：

$|I_1|=|p^{\lambda+1}\dfrac{1}{p^{\lambda+2}}\displaystyle\int_p^{\xi_p}\sin y dy|\leq\dfrac{2}{p}\to 0\ (p\to\infty)$ （其中 $p<\xi_p<p^2$），而

$|I_2|\leq p^{\lambda+1}\displaystyle\int_{p^2}^{+\infty}\frac{1}{y^{\lambda+2}}dy=\frac{1}{(\lambda+1)p^{\lambda+1}}\to 0\ (p\to\infty)$ 故在（1）中，令 $h\to 0^+$ 即 $p\to\infty$，便有

$$\lim_{h\to 0^+} I_\lambda(h)=0\ 。$$

当 $-2<\lambda\leq -1$ 时，结论显然。

但当 $\lambda\leq -2$ 时，积分 $\displaystyle\int_0^h x^\lambda \sin\frac{1}{x}dx$ 发散。这就完成了定理的证明。

下面把上述积分 $I_\lambda(h)$ 加以推广而考虑积分

$$I(\lambda,\mu,h)=\frac{1}{h^\lambda}\int_0^h x^\mu \sin\frac{1}{x}dx。$$

定理二 当 $\mu>-2$，$\lambda<\mu+2$ 时，有

$$\lim_{h\to 0^+} I(\lambda,\mu,h)=0\ 。$$

证明 在 $I(\lambda,\mu,h)$ 中，令 $x=\dfrac{1}{y}$，并记 $p=\dfrac{1}{h}$，则

$$I(\lambda,\mu,h)=p^\lambda\int_p^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{\mu+2}}dy\ 。$$

当 $\mu>-2$，$\lambda<\mu+2$ 时，任取 $\varepsilon>0$，取 $p_0=\left[\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu+2-\lambda}}\right]$，则由 $\int_p^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{\mu+2}}dy$ 收敛知，对 $p>p_0$，存在 $A(p)>p>p_0$，使得 $\left|p^{\lambda}\int_{A(p)}^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{\mu+2}}dy\right|<\varepsilon$。而

$$\left|p^{\lambda}\int_p^{A(p)}\frac{\sin y}{y^{\mu+2}}dy\right|=p^{\lambda}\frac{1}{p^{\mu+2}}\left|\int_p^{\xi_p}\sin y dy\right|<\frac{2}{p^{\mu+2-\lambda}}<\varepsilon \text{ 其中 } p<\xi_p<A(p)\text{。}$$

于是 $|I(\lambda,\mu,h)|\leq\left|p^{\lambda}\int_p^{A(p)}\frac{\sin y}{y^{\mu+2}}dy\right|+\left|p^{\lambda}\int_{A(p)}^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{\mu+2}}dy\right|<2\varepsilon$。

即 $\lim\limits_{h\to 0^+}I(\lambda,\mu,h)=0$。完成定理的证明。

易知，当且仅当 $\mu<-2$，$\lambda<\mu+2$ 时，$\lim\limits_{h\to 0^+}I(\lambda,\mu,h)=0$。

引理 设 $p(x)$ 是一个实系数多项式，$\lambda>-1$，则

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\lambda+1}}\int_0^h p(x)x^{\lambda}\sin\frac{1}{x}dx=0\text{。}$$

定理三 设 $f(x)$ 是〔0,1〕上的连续函数，$\lambda>-2$ 及 $\int_0^h f(x)x^{\lambda}\sin\frac{1}{x}dx$ 收敛，则有

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\lambda+1}}\int_0^h f(x)x^{\lambda}\sin\frac{1}{x}dx=0\text{。}$$

证明 当 $-2<\lambda\leq-1$ 时，结论显然。
当 $\lambda>-1$，由引理及 Weierstrass 逼近定理即得所证。

下面再讨论另一种情况。

定理四 若 $g(x)$ 是〔$0,+\infty$) 上的函数，它在任意有限区间上可积，且 $\left|\int_0^A g(x)dx\right|\leq M$（M为一固定常数），对一切 $A>0$ 皆成立，又 $x^{\lambda}g\left(\frac{1}{x}\right)$ 是可积的，则

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\lambda+1}}\int_0^h x^{\lambda}g\left(\frac{1}{x}\right)dx=0\quad(\lambda>-2)$$

证明 令 $F(\lambda,h)=\frac{1}{h^{\lambda+1}}\int_0^h x^{\lambda}g\left(\frac{1}{x}\right)dx$，作 $x=\frac{1}{y}$，并记 $p=\frac{1}{h}$，得 $F(\lambda,\mu)=p^{\lambda+1}\int_p^{+\infty}\frac{g(y)}{y^{\lambda+2}}dy$。由 Dirichlet 判别法可知，$\int_p^{+\infty}\frac{g(y)}{y^{\lambda+2}}$ 是可积的，同定理二可得，

$$\operatorname{Lim}_{h\to 0+}F(\lambda,h)=0\text{，即得所证。}$$

同前边讨论，只要将 $\sin x$ 换成满足上述条件的 $g(x)$，便可得一系列结果。最后，我们有

定理五 设 $f(x)$ 是〔0，1〕上的连续函数，$g(x)$ 是〔$0,+\infty$) 上任何有限区间上可积的函数。且存在常数M，使 $\left|\int_0^A g(x)dx\right|\leq M$ 对一切 $A>0$ 成立，$\mu<\lambda+2$，$\lambda>-2$，则有 $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\mu}}\int_0^h f(x)x^{\lambda}g\left(\frac{1}{x}\right)dx=0$。

参 考 文 献

〔1〕邵品琮，一个无穷小量命题的两种证法，曲阜师院学报，2（1984）。