因此，命题成立．

②若$p(z)=a$有k个根 $(n\geqslant k>1)$

设 $p(z)-a=(z-a_1)^{r_1}(z-a_2)^{r_2}\cdots(z-a_i)^{r_k}\cdots$　　（1）

$(r_1+r_2+\cdots+r_k=n)$

又设$p(z)=b$有s个重根$b_1,b_2,\cdots,b_s$，重度分别为 $g_1,g_2\cdots g_s$，$g_i>1$（$i=1,2\cdots s$）若$s=0$即$p(z)-b=0$有n个根，命题显然成立．

若$s>0$，只要证

$g_1+g_2+\cdots+g_s-s<k$……（2）成立．

设$p(z)-b=(z-b_1)^{g_1}\cdots(z-b_s)^{g_s}\varphi(z)$(3)

由（1）有

$p'(z)=(z-a_1)^{r_1-1}\cdots(z-a_k)^{r_k-1}f(z)$

且 $1\leqslant\partial(f(z))=k-1$，这里 $\partial(f(z))$表多项式$f(z)$的阶数．又设$f(z)=0$有h个根，设为$c_1,c_2,\cdots,c_h(h\leqslant k-1)$

重度分别为$n_1,n_2,\cdots,n_h$

由（3）知$b_1,b_2,\cdots,b_s$均是$p'(z)=0$的根

且 $b_i\neq a_j$ （$i=1,2\cdots s$，$j=1,2\cdots k$）

由唯一分解定理 $b_1,b_2,\cdots,b_s$均是$f(z)=0$的根．不妨设$b_i=c_i$，这样就有$n_i=g_i-1$($i=1,2\cdots s$）显然$n_1+n_2+\cdots+n_s\leqslant k-1$

$\therefore$ $g_1+g_2+\cdots+g_s-s\leqslant k-1$．即（2）成立．$\therefore$ $p(z)-a=0$有k个根时$(n\geqslant k>1)$，命题成立．综合①②命题获证．

下面我们要利用命题1来证明另一命题．

命题2 设$p(z)$，$q(z)$为两个定义在复数域内的非常数多项式，a、b是常数，$a\neq b$．则

$p(z)+q(z)\equiv a+b$与

$$\begin{cases} p(z)=b\Longleftrightarrow q(z)=b \\ p(z)=a\Longleftrightarrow q(z)=a \end{cases}$$ 等价．

证明 1）若$p(z)+q(z)\equiv a+b$

显然有 $\begin{cases} p(z)=a\Longleftrightarrow q(z)=b \\ p(z)=b\Longleftrightarrow q(z)=a \end{cases}$ 成立．

2）若 $\begin{cases} p(z)=a\Longleftrightarrow q(z)=b \\ p(z)=b\Longleftrightarrow q(z)=a \end{cases}$ 成立．

不妨设 $n=\partial(p(z))\geqslant\partial(q(z))$

设 $p(z)=a$有k个不同的根，$p(z)=b$有l个不同的根．显然这$k+l$个根均不相等．由命题1，$k+l>n$．

i) 由$p(z)=a\Longleftrightarrow q(z)=b$知，$p(z)=a$的$k$个根也是$p(z)+q(z)=a+b$的根．

ii) 由$p(z)=b\Longleftrightarrow q(z)=a$知，$q(z)=b$的$l$个根也是$p(z)+q(z)=a+b$的根．

$\therefore$ $p(z)+q(z)=a+b$至少有$k+l>n$个不相同的根．而$p(z)+q(z)=a+b$的次数小于或等于n．$\therefore$ $p(z)+q(z)\equiv a+b$．

故命题2获证．

有了命题1，"参考文献"中的定理1的证明可以变得更简单，下面我们应用命题1对定理1的证明给予适当的改进．

定理1 设$p(z)$，$q(z)$为二多项式，不蜕化为常数，a，b为二判别的数．若

$$\begin{cases} p(z)=a\Longleftrightarrow q(z)=a \\ p(z)=b\Longleftrightarrow q(z)=b \end{cases}\qquad(*)$$

则 $p(z)\equiv q(z)$

事实上：设 $n=\partial(p(z))\geqslant\partial(q(z))$，考察多项式 $H(z)=p(z)-q(z)$，$\partial(H(z))\leqslant n$，由$(*)$以及命题1知$H(z)=0$至少有$n+1$个解（不相同）$\therefore$ $H(z)\equiv0$ $p(z)\equiv q(z)$故定理获证．

本文得到彭明海老师指点．深表谢意．

参 考 文 献

1984年第1期《数学进展》中的论文：《关于多项式及超越整函数的某些问题》

关于矩阵追迹的一些不等式

曲阜师范学院数学系81级　方玉光

在第二次一般不等式国际会议上，*Richard Bellman*宣读了他的论文《正定矩阵中的一些不等式》，文章讨论了在矩阵是正定的条件下追迹的一些不等式．本文试图将其条件减弱并给出一些新的不等式．

不等式1 $tr(AB)\leqslant\sqrt{tr(A^2)}\cdot\sqrt{tr(B^2)}$．其中$A$，$B$是对称矩阵．（这里$tr(A)$表示矩阵$A$的追迹．下同）

不等式2 $tr(AB)^2\leqslant tr(A^2B^2)$．其中

A, B为实对称矩阵．

不等式 1 的证明仿照Bellman的证法很易获得，而不等式 2 的证法在原文中就欠清楚，现给出其详细证明：

先证明一个结论：若 A 为实反对称矩阵，则有：$tr(A^2)\leqslant 0$.

事实上，令$C=A^2$，其中$C=(c_{ij})_{n\times n}$ $A=(a_{ij})_{n\times n}$则$a_{ik}=-a_{ki}$ $(i,k=1,2,\cdots n)$.

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki}=-\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

$$trA^2=trC=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\leqslant 0.$$

下证不等式 2：

$$(AB-BA)^2=(AB)^2+(BA)^2-AB^2A-BA^2B \quad \cdots\cdots(1)$$

因为A、B是实对称矩阵，所以$AB-BA$是实反对称矩阵，从而由（1）可得：

$$tr(AB)^2+tr(BA)^2\leqslant tr(AB^2A)+tr(BA^2B). \quad \cdots\cdots(2)$$

当 A, B 皆为可逆阵时，由 $AB^2A=A(B^2A^2)A^{-1}$，$BA^2B=B(A^2B^2)B^{-1}$，$(BA)^2=B(AB)^2B^{-1}$. 代入（2）即得：

$$tr(AB)^2\leqslant tr(A^2B^2).$$

当A,B至少有一个不可逆时，以$A+\lambda E$，$B+\lambda E$代替A,B（λ取这样的值，使得：$|A+\lambda E|\neq 0$，$|B+\lambda E|\neq 0$. 同样有

$$tr[(A+\lambda E)(B+\lambda E)]^2\leqslant tr(A+\lambda E)^2(B+\lambda E)^2$$

令$\lambda\to 0$ 得$tr(AB)^2\leqslant tr(AB)^2$.（证毕）

下面给出一些新的不等式：

不等式3 （Minkowski 不等式）

$\sqrt{tr(A+B)^2}\leqslant\sqrt{tr(A^2)}+\sqrt{tr(B^2)}$. 其中$A,B$为实对称矩阵.

证明 $(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA$

所以有 $tr(A+B)^2=tr(A^2)+tr(B^2)+2tr(AB)$. 应用不等式 1 可得：

$$tr(A+B)^2\leqslant tr(A^2)+tr(B^2)+2\sqrt{tr(A^2)}\sqrt{tr(B^2)}=(\sqrt{tr(A^2)}+\sqrt{tr(B^2)})^2,$$

即 $\sqrt{tr(A+B)^2}\leqslant\sqrt{tr(A^2)}+\sqrt{tr(B^2)}$.

不等式4 $tr(AB)\leqslant tr\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$. 其中 A、B 为实对称矩阵，这称为算术——几何平均值不等式.

证明 $(A+B)^2-4AB=(A-B)^2+2BA-2AB$.

而 $tr[(A-B)^2+2BA-2AB]=tr(A-B)^2+2tr(BA)-2tr(AB)=tr(A-B)^2\geqslant 0$.

故 $tr[(A+B)^2-4AB]\geqslant 0$. 即：

$$tr(AB)\geqslant tr\left(\frac{A+B}{2}\right)^2.$$

不等式5 $tr(A^2)\leqslant[tr(A)]^2$. 其中 A 为非负定矩阵.

证明 因为A非负定的，故存在正交阵T，使 $A=T^{-1}diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}T$ $(\lambda_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots n)$ 于是 $A^2=T^{-1}diag\{\lambda_1^2,\cdots\lambda_n^2\}T$.

$$tr(A^2)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2=[tr(A)]^2$$

不等式6 $tr(AB)\leqslant tr(A)tr(B)$.

其中A,B为非负定矩阵.

证明 应用不等式 1 与不等式 5 可得：

不等式 7 $tr(AB)^2\leqslant[tr(AB)]$ 两个不等式中的A、B均为非负定矩阵.

证明 当A,B为正定矩阵时，则存在非奇异矩阵T_1,T_2，使得：$A=T_1T_1'$，$B=T_2T_2'$，从而$(AB)^2=T_1[(T_1'T_2)(T_1'T_2)']^2T_1^{-1}$

应用不等式 5 有：

$$tr(A+B)^2=tr[(T_1'T_2)(T_1'T_2)']^2\leqslant[tr(T_1'T_2)(T_1'T_2)']^2=[tr(AB)]^2.$$

当A,B为半正定时，则：$A+\lambda E$，$B+\lambda E(\lambda>0)$是正定的，于是有

$$tr[(A+\lambda E)(+\lambda E)]^2\leqslant[tr(A+\lambda E)(B+\lambda E)]^2.$$

令$\lambda\to 0$ 即得：$tr(AB)^2\leqslant[tr(AB)]^2$.

（证毕）.

更正

本刊1984年第 6 期《第十三届美国数学竞赛简况及题解》一文第 3 题的解答中最后一句应为“$\angle APC+\angle BPD$有下界而最小值为0，当PC与PA和PD与PB重合时达到”。特向读者致歉。

得圆率百位，并周求径率亦以除法补至百位”，黄、左两人也做了不少工作，这就是《圜率考真图解》一书。在我国计算π的历史上，它是一种新发明、新进展。但书中没有全载这一百来位数字，后人有所怀疑。

总之，湖南数学在短短时间能达到这种先进水平，确令人欣喜。

七、殚精竭虑

丁取忠主持编刻工作极为慎重，丛书中多处看到这样的句子：“如《缀术补》等书为理较深，未易猝得要领，不敢卤莽付梓”。又其末二图，立法颇觉迂迴，……太史诺其更易，俟寄到补刻也。”“余又多所未解，不敢妄为增易。”等等。

他们注意修改书稿和版面，如“其脱误处多所更正，……梓既成……又校得……脱误者十数处，余又为改正而重梓之，遂成完璧。”[14]可谓不惮其烦。

他们尽量为读者着想：“今取术稍难通者，于各种后依术各补一草”。“共为图解，使学者循序可知其立法之源。”“欲考其立式之原不可遽得，学者难焉，潜因于暇日一一尽为补草。”

就这样，几年中边研究、边写作、边修订、边编辑，处于高度紧张状态，左潜于1874年突然去世，丁取忠几年后也“物化”。丛书最后一本，是由丁取忠友人王闿运出资刻毕的。

八、版藏于家

综上所述，《白芙堂算学丛书》是湖南数学之光，受到国内外有识之士的赞喻。为刻这套书，虽有胡林翼等人资助，用费仍感不够，丁取忠到临终时已“不名一钱”。几大柜木刻板初“藏于古荷池精舍”，后转移到乡下北湖塘丁氏聚族而居的白芙堂。丁氏家族虽贫，仍珍藏书板七、八十年之久。笔者听丁取忠侄玄孙丁继英同志回忆，他在本世纪三十年代还参加过洗版、晾乾保存的劳动。丁取忠的玄孙丁继辉同志一直把家传的一套丛书妥为保藏，到1984年9月献给国家，从这里我们看到劳动人民爱护科学文物的一片赤诚。一百多年历尽沧桑，这套丛书弥足珍贵。作为湖南近代数学史的丰碑，还有很多研究课题有待我们深入开展。

湖南数学通讯（双月刊）

＊湖南省报刊登记证66号＊

1984年第2期（总第25期）

1985年4月20日出版

编辑　湖南省数学会
《湖南数学通讯》编辑部

印刷　长沙市造纸工业公司印刷服务部

发行　长沙市邮局

代号　42—14

定价　0.30元